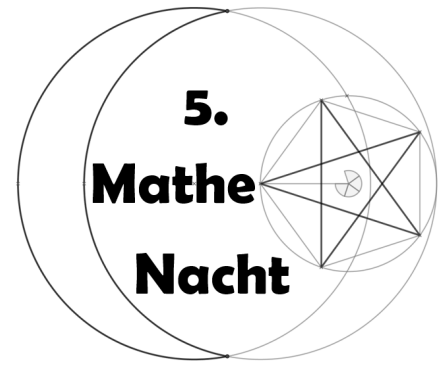


## Rechenspaß mit Matrizen



1. Sei  $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

- Bestimme  $\text{Det}(A)$  mit dem Verfahren von Sarrus.
- Existiert  $A^{-1}$ ? Wenn ja, bestimme mit einem Verfahren Deiner Wahl  $\text{Det}(A^{-1})$ .  
Wenn nein, begründe, warum  $A^{-1}$  nicht existiert.
- Bestimme  $\text{Det}(\frac{1}{9} \cdot A * A^t)$ .

2. Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist  $B$  invertierbar?

3. Seien  $C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ ,  $D := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ .

- Bestimme  $\text{Det}(C)$ .
- Bestimme  $\text{Det}(D)$ .
- Bestimme  $\text{Det}(C * D)$ .

4. Sei  $E := \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Existiert  $E^{-1}$ ? Wenn ja, dann bestimme  $E^{-1}$  mit einem Verfahren Deiner Wahl.  
Wenn nein, begründe, warum  $E^{-1}$  nicht existiert.

5. Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\text{Rg}(F) = 2$ ?

6. Sei  $G := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Bestimme  $\text{Rg}(G)$ .

7. Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $H := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$ ,  $J := \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  gilt  $\text{Rg}(H) = \text{Rg}(J)$ ?

8. Seien  $a \in \mathbb{R}$  und  $K := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 16 \\ a & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Für welche  $a \in \mathbb{R}$  existiert  $K^{-1}$ ? Gilt dann  $\text{Rg}(K) = \text{Rg}(K^{-1})$ ?

9. Sei  $L := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem  $x * L = (11, 17, -17)$  mit Hilfe der CRAMER'SCHEN Regel.

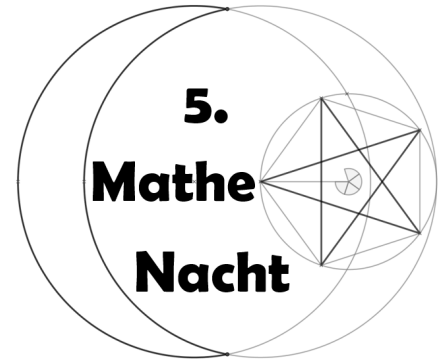
10. Sei  $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4 \times 4}(\mathbb{R})$ .

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem  $x * M = (3, 2, 6, 1)$  mit Hilfe der CRAMER'SCHEN Regel.

11. Sei  $N := \begin{pmatrix} 9 & -7 & 10 & 0 & 3 \\ 7 & 12 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5 \times 5}(\mathbb{R})$ .

Bestimme  $\text{Det}(N)$  mit einem Verfahren Deiner Wahl.

## Abbildungsmatrizen



1. Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $V$  und geeignete  $\mathbb{R}$ -Basen so, dass  $B$  die Abbildungsmatrix eines  $\mathbb{R}$ -Automorphismus auf  $V$  bezüglich dieser Basen ist? Bitte begründen!

2. Sei  $\hat{C}$  die geordnete Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$  gegeben durch

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

- a) Ist  $M(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$  invertierbar? Bitte begründen!
- b) Bestimme  $\text{Bild}(\alpha)$  und  $\text{Kern}(\alpha)$ !
3. Sei  $K$  ein Körper und seien  $V, W$  zwei  $K$ -Vektorräume. Weiter sei  $m := \dim_K(V) \neq \dim_K W =: n$ .

**Wahr oder Falsch?** Es gibt ein  $\beta \in \text{Hom}_K(V, W)$  so, dass  $\beta$  bijektiv ist.

4. Seien  $V := \mathbb{R}^3$  und  $b_1 := (1, 1, 0)$ ,  $b_2 := (0, -1, 0)$ ,  $b_3 := (0, 0, 2)$ . Weiter sei  $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$  und  $\alpha : V \rightarrow V$  sei definiert durch:

$$b_1^\alpha = b_2 + b_3, \quad b_2^\alpha = (2, 1, -2), \quad b_3^\alpha = (1, -1, 0)$$

- a) Zeige, dass  $\hat{B}$  eine geordnete  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{R}^3$  ist.
- b) Bestimme  $M(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$ !
- c) Ist  $\alpha$  bijektiv? Bitte begründen.
- d) Berechne die Bilder von  $(1, 0, 2)$  und  $(1, -1, 0)$  unter  $\alpha$ !

5. Sei wieder  $V := \mathbb{R}^3$  und  $\hat{B} := ((-1, 2, 3), (1, -1, 2), (0, 2, 1))$ . Wir bezeichnen die Vektoren in  $\hat{B}$  der Reihe nach mit  $b_1, b_2, b_3$  und dürfen wissen, dass  $\hat{B}$  eine geordnete  $\mathbb{R}$ -Basis ist. Weiter sei  $\varphi \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$  gegeben durch:

$$b_1^\varphi = (-1, 3, 8), \quad b_2^\varphi = 3b_3, \quad (1, 1, 3)^\varphi = (0, 5, 7).$$

- a) Es sei  $\hat{C}$  die geordnete Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Berechne  $A := M(\varphi, \hat{B}, \hat{B})$  und  $\tilde{A} := M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$ !
- b) Berechne  $(2, 0, 2)^\varphi$ !
- c) Ist  $\varphi$  surjektiv? Bitte begründen!
- d) Welchen Rang hat  $A$ ? Welchen Rang hat  $\tilde{A}$ ?
- e) Bestimme ein Urbild von  $(0, 3, -3)$  unter  $\varphi$ . Gibt es weitere Urbilder?
6. Sei  $\beta \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ . Sei weiter  $\hat{B}$  die geordnete Standardbasis von  $\mathbb{R}^3$  und  $\hat{C}$  die geordnete Standardbasis von  $\mathbb{R}^2$ . Es sei  $A := M(\beta, \hat{B}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ . Bestimme  $\text{Kern}(\beta)$ ! Ist  $\beta$  injektiv?

7. Sei  $V := \mathbb{R}^4$  und  $\hat{B} := ((b_1, b_2, b_3, b_4))$  eine geordnete  $\mathbb{R}$ -Basis von  $V$ . Sei  $\alpha$  gegeben durch:

$$b_1^\alpha = 2b_1, \quad b_2^\alpha = b_1 + b_3, \quad b_3^\alpha = 2b_1, \quad b_4^\alpha = b_3$$

- a) Gib eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\text{Bild}(\alpha)$  an!
- b) Es sei  $U := \langle b_2, b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$ . Bestimme  $U^\alpha$ !
8. Sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum mit der geordneten  $K$ -Basis  $(b_1, b_2, b_3)$ . Weiter sei  $0 \neq \delta \in K$  fest. Die lineare Abbildung  $\alpha \in \text{End}(V)$  sei definiert durch:

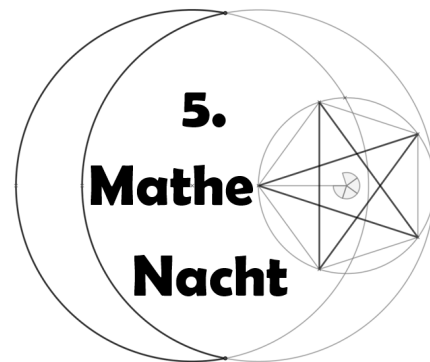
$$b_1^\alpha = \delta \cdot b_2, \quad b_2^\alpha = b_1, \quad b_3^\alpha = b_1 + b_2$$

Sei  $U \leq_K V$  mit  $U = \langle b_1, b_2 \rangle_K$ . Zeige:  $U^\alpha = U$ .

9. Sei  $K$  ein Körper,  $n \in \mathbb{N}$  und  $V := K^n$ . Weiter sei  $A \in M_{n \times n}(K)$  und  $\eta \in \text{End}(V)$  wie folgt definiert: Für alle  $v \in V$  sei  $v^\eta := v * A$ .

**Wahr oder Falsch?** Für jede geordnete  $K$ -Basis  $\hat{B}$  von  $V$  gilt:  $M(\eta, \hat{B}, \hat{B}) = A$ .

# Lineare Gleichungssysteme



1. Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1\end{aligned}$$

die Matrix  $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  und der Vektor  $b := (1, 1, 1)$ .

- Schreibe das Gleichungssystem in die Form  $x * A = d$  um und kennzeichne die Koeffizientenmatrix, den Ergebnisvektor und den Variablenvektor jeweils mit blau, rot und grün.
- Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix  $A^*$  hin und bestimme den Rang von  $A^*$ . Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen ohne sie explizit zu berechnen?
- Nun einmal andersherum:  
Schreibe das Gleichungssystem  $x * B = b$  mit einzelnen Gleichungen und Variablen  $x_1, x_2, x_3$  hin.
- Bestimme nun für das Gleichungssystem aus (c) die Lösungsmenge, indem du eine Lösung errätst und dann mit dem dazugehörigen HLGS weitermachst.

2. Vervollständige die Koeffizientenmatrix  $A := \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  so, dass das Lineare Gleichungssystem  $x * A = (1, 2, 1)$

- genau eine Lösung hat.
- unlösbar ist.

3. Seien  $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$  und  $d := (a, 6, 0)$ .

- Wähle  $a \in \mathbb{R}$  so, dass das Lineare Gleichungssystem  $x * A = d$  keine Lösung besitzt.
- Für welche  $a \in \mathbb{R}$  ist das Lineare Gleichungssystem  $x * A = d$  lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

4. Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4 \\2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= -8\end{aligned}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständige Lösungsmenge des LGS.

5. Gegeben ist  $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

a) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems  $x * A = (0, 1, 0)$  sagen?

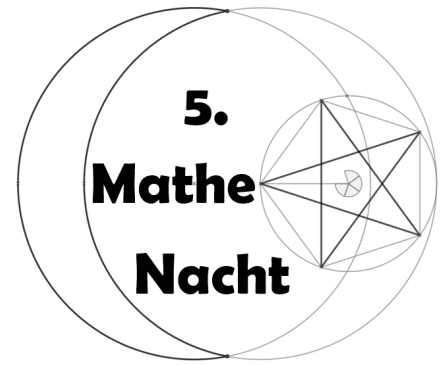
b) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems  $x * A = (1, 0, 1)$  sagen?

6. Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem  $x * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$ .

a) Ist die Lösungsmenge des LGS ein  $\mathbb{R}$ -Teilraum von  $\mathbb{R}^3$ ?

b) Falls die Lösungsmenge ein  $\mathbb{R}$ -Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

## Eigenwerte/Eigenvektoren



1. Gegeben sei der  $\mathbb{R}$ -Vektorraum  $\mathbb{R}^3$ . Weiter sei die geordnete  $\mathbb{R}$ -Basis  $\hat{B}$  gegeben durch  $\hat{B} := ((-2, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, -1))$  und die Abbildung  $\alpha \in \text{End}(V)$  sei bestimmt durch die folgenden Bilder:

$$\begin{aligned}(-2, 1, 0)^\alpha &= (-2, 1, 0) \\(0, 1, 1)^\alpha &= (-4, -3, -3) \\(0, 0, -1)^\alpha &= (-2, -2, -3)\end{aligned}$$

- a) Bestimme  $\text{Spek}(\alpha)$ !
- b) Gib zu jedem Eigenwert die Dimension des Eigenraumes an!
- c) Bestimme zu einem Eigenwert den Eigenraum!
- d) Prüfe, ob  $\alpha$  diagonalisierbar ist!
2. Es sei  $V := \mathbb{R}^3$  und  $\alpha \in \text{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ . Folgendes ist über  $\alpha$  bekannt: 2 ist ein Eigenwert von  $\alpha$  mit  $\text{Eig}_V(\alpha, 2) = \langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle_{\mathbb{R}}$ . 4 ist ein Eigenwert von  $\alpha$ .

Zeige:  $\text{Spek}(\alpha) = \{2, 4\}$ .

3. Es sei  $K$  ein Körper,  $V$  ein  $K$ -Vektorraum und  $\alpha \in \text{End}(V)$ . Weiter seien  $\lambda \in \text{Spek}(\alpha)$ ,  $v_1 \in \text{Eig}_V(\alpha, \lambda)$  und  $v_2 \in V$ .

Zeige: Ist  $\{v_1, v_2\}$  linear abhängig, so ist  $v_2 \in \text{Eig}_V(\alpha, \lambda)$ .

4. Es sei  $V := \mathbb{R}^3$  und  $\hat{C}$  sei eine geordnete  $\mathbb{R}$ -Basis von  $V$ . Der Homomorphismus  $\gamma : V \rightarrow V$  sei gegeben durch die Abbildungsmatrix:

$$M(\gamma, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

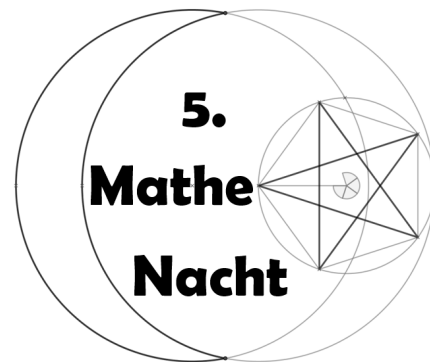
Zeige, dass  $\gamma$  nicht diagonalisierbar ist.

5. Es sei  $K$  ein Körper und  $V$  ein  $K$ -Vektorraum der Dimension 4. Weiter seien  $v_1, v_2, v_3, v_4 \in V$  so, dass  $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$   $K$ -linear unabhängig ist. Es sei  $\beta \in \text{End}(V)$  und es gelte

$$v_1^\beta = 3v_1, \quad v_2^\beta = 4v_2, \quad v_3^\beta = -v_3, \quad v_4^\beta = -v_4$$

Zeige, dass  $\beta$  diagonalisierbar ist!

## Zusammenhänge



1. Sei  $\hat{B}$  die geordnete Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Seien weiter  $a \in \mathbb{R}$  und  $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- Berechne nachvollziehbar mittels Leibniz-Formel und Entwicklung nach der 2. Zeile die Determinante von  $A$ .
  - Begründe, warum  $\alpha$  bijektiv ist und berechne  $\mathcal{M}(\alpha^{-1}, \hat{B}, \hat{B})$ .
  - Ersetze in der Abbildungsmatrix  $A$  die letzte Zeile durch  $(1, -1, a)$ . Für welchen Wert von  $a$  ist  $\alpha$  nicht bijektiv?
  - Schreibe für diesen Wert von  $a$  den Spaltenraum von  $A$  als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.
2. Sei  $\hat{B}$  die geordnete Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R}).$$

- Zeige, dass  $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$  das charakteristische Polynom von  $\alpha$  ist und gib die Eigenwerte von  $\alpha$  an.
- Stelle das lineare Gleichungssystem auf, dessen Lösungsmenge genau  $\text{Eig}_{\mathbb{R}}(\alpha, 0)$  ist und löse es nachvollziehbar mit dem Gauß-Algorithmus.
- Welche Dimension haben  $\text{Kern}(\alpha)$  und  $\text{Bild}(\alpha)$ ?  
Gib eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\text{Kern}(\alpha)$  an und ergänze diese zu einer  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{R}^3$ .
- Ist  $\alpha$  bijektiv?



3. Sei  $\hat{B}$  die geordnete Standardbasis des  $\mathbb{R}^3$ . Sei  $\alpha \in \text{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$  durch folgende Abbildungsmatrix gegeben:  $A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3 \times 3}(\mathbb{R})$ .

- a) Berechne die Eigenwerte  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  von  $\alpha$ .
- b) Sei  $P_{\alpha}(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$  mit  $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$  das charakteristische Polynom von  $\alpha$ .  
Sei  $M$  die Menge aller  $3 \times 3$ -Matrizen über  $\mathbb{R}$ . Zeige, dass  $P_{\alpha}(A) = 0_M$  gilt.  
(Hinweis:  $P_{\alpha}(A)$  ist durch den Einsetzhomomorphismus erklärt.)
- c) Bestimme aus  $P_{\alpha}(A) = 0_M$  die inverse Matrix  $A^{-1}$ .
- d) Bestimme für jedes  $j \in \{1, 2, 3\}$  die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems  $x(A - \lambda_j I) = 0_{\mathbb{R}^3}$  und zeige, dass  $\hat{C} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 4))$  eine  $\mathbb{R}$ -Basis von  $\mathbb{R}^3$  bestehend aus Eigenvektoren ist.
- e) Berechne  $\mathcal{M}(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$ . Ist  $\alpha$  diagonalisierbar?