5. Mathe Nacht

Rechenspaß mit Matrizen

1. Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Bestimme $\mathrm{Det}(A)$ mit dem Verfahren von Sarrus.

b) Existiert A^{-1}? Wenn ja, bestimme mit einem Verfahren Deiner Wahl $\mathrm{Det}(A^{-1})$. Wenn nein, begründe, warum A^{-1} nicht existiert.

c) Bestimme $\mathrm{Det}(\frac{1}{9} \cdot A * A^t)$.

2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & a & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist B invertierbar?

3. Seien $C := \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$, $D := \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 4 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 7 & 3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

a) Bestimme $\mathrm{Det}(C)$.

b) Bestimme $\mathrm{Det}(D)$.

c) Bestimme $\mathrm{Det}(C * D)$.

4. Sei $E := \begin{pmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 1 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Existiert E^{-1}? Wenn ja, dann bestimme E^{-1} mit einem Verfahren Deiner Wahl. Wenn nein, begründe, warum E^{-1} nicht existiert.

5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $F := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ 4 & 0 & a \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Rg}(F) = 2$?

6. Sei $G := \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbb{R})$.

Bestimme $\mathrm{Rg}(G)$.

7. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $H := \begin{pmatrix} a & 0 & 1 \\ 0 & a+1 & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix}$, $J := \begin{pmatrix} -a & 0 & 2 \\ 0 & -a & 0 \\ 1 & a & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathrm{Rg}(H) = \mathrm{Rg}(J)$?

8. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $K := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & a & 16 \\ a & -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Für welche $a \in \mathbb{R}$ existiert K^{-1}? Gilt dann $\mathrm{Rg}(K) = \mathrm{Rg}(K^{-1})$?

9. Sei $L := \begin{pmatrix} 2 & 4 & -5 \\ 3 & 3 & 2 \\ -4 & -5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem
$x * L = (11, 17, -17)$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

10. Sei $M := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 4}(\mathbb{R})$.

Bestimme eine Lösung für das lineare Gleichungssystem
$x * M = (3, 2, 6, 1)$ mit Hilfe der Cramer'schen Regel.

11. Sei $N := \begin{pmatrix} 9 & -7 & 10 & 0 & 3 \\ 7 & 12 & 0 & 0 & 1 \\ 8 & -6 & 5 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{5\times 5}(\mathbb{R})$.

Bestimme $\mathrm{Det}(N)$ mit einem Verfahren Deiner Wahl.

Abbildungsmatrizen

1. Gegeben sei die Matrix

$$B := \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ 4 & -2 & 6 \\ 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Gibt es einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V und geeignete $\mathbb{R}$-Basen so, dass B die Abbildungsmatrix eines $\mathbb{R}$-Automorphismus auf V bezüglicher dieser Basen ist? Bitte begründen!

2. Sei $\hat{C}$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V, V)$ gegeben durch

$$M(\alpha, \hat{C}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 6 \\ -2 & -2 & 6 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

a) Ist $M(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$ invertierbar? Bitte begründen!

b) Bestimme $\mathrm{Bild}(\alpha)$ und $\mathrm{Kern}(\alpha)$!

3. Sei K ein Körper und seien V, W zwei K-Vektorräume. Weiter sei $m := \dim_K(V) \neq \dim_K W =: n$.

Wahr oder Falsch? Es gibt ein $\beta \in \mathrm{Hom}_K(V, W)$ so, dass β bijektiv ist.

4. Seien $V := \mathbb{R}^3$ und $b_1 := (1, 1, 0)$, $b_2 := (0, -1, 0)$, $b_3 := (0, 0, 2)$. Weiter sei $\hat{B} := (b_1, b_2, b_3)$ und $\alpha : V \to V$ sei definiert durch:

$$b_1^\alpha = b_2 + b_3,\ b_2^\alpha = (2, 1, -2),\ b_3^\alpha = (1, -1, 0)$$

a) Zeige, dass $\hat{B}$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.

b) Bestimme $M(\alpha, \hat{B}, \hat{B})$!

c) Ist α bijektiv? Bitte begründen.

d) Berechne die Bilder von $(1, 0, 2)$ und $(1, -1, 0)$ unter α!

5. Sei wieder $V := \mathbb{R}^3$ und $\hat{B} := ((-1,2,3),(1,-1,2),(0,2,1))$. Wir bezeichnen die Vektoren in $\hat{B}$ der Reihe nach mit b_1, b_2, b_3 und dürfen wissen, dass $\hat{B}$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis ist. Weiter sei $\varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$ gegeben durch:

$b_1^\varphi = (-1,3,8),\ b_2^\varphi = 3b_3,\ (1,1,3)^\varphi = (0,5,7).$

a) Es sei $\hat{C}$ die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Berechne $A := M(\varphi, \hat{B}, \hat{B})$ und $\tilde{A} := M(\varphi, \hat{B}, \hat{C})$!

b) Berechne $(2,0,2)^\varphi$!

c) Ist φ surjektiv? Bitte begründen!

d) Welchen Rang hat A? Welchen Rang hat $\tilde{A}$?

e) Bestimme ein Urbild von $(0,3,-3)$ unter φ. Gibt es weitere Urbilder?

6. Sei $\beta \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$. Sei weiter $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{R}^3$ und $\hat{C}$ die geordnete Standardbasis von $\mathbb{R}^2$. Es sei $A := M(\beta, \hat{B}, \hat{C}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Bestimme Kern$(\beta)$! Ist β injektiv?

7. Sei $V := \mathbb{R}^4$ und $\hat{B} := ((b_1, b_2, b_3, b_4))$ eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis von V. Sei α gegeben durch:

$$b_1^\alpha = 2b_1,\ b_2^\alpha = b_1 + b_3,\ b_3^\alpha = 2b_1,\ b_4^\alpha = b_3$$

a) Gib eine $\mathbb{R}$-Basis von Bild(α) an!

b) Es sei $U := \langle b_2, b_3 \rangle_{\mathbb{R}}$. Bestimme U^α!

8. Sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum mit der geordneten K-Basis (b_1, b_2, b_3). Weiter sei $0 \neq \delta \in K$ fest. Die lineare Abbildung $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ sei definiert durch:

$$b_1^\alpha = \delta \cdot b_2,\ b_2^\alpha = b_1,\ b_3^\alpha = b_1 + b_2$$

Sei $U \leq_K V$ mit $U = \langle b_1, b_2 \rangle_K$. Zeige: $U^\alpha = U$.

9. Sei K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $V := K^n$. Weiter sei $A \in M_{n \times n}(K)$ und $\eta \in \mathrm{End}(V)$ wie folgt definiert: Für alle $v \in V$ sei $v^\eta := v * A$.

Wahr oder Falsch? Für jede geordnete K-Basis $\hat{B}$ von V gilt: $M(\eta, \hat{B}, \hat{B}) = A$.

Lineare Gleichungssysteme

1. Gegeben seien das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 5x_2 + x_3 &= 0 \\ 4x_1 + 6x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

die Matrix $B := \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 4 & 0 & 8 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und der Vektor $b := (1, 1, 1)$.

a) Schreibe das Gleichungssystem in die Form $x * A = d$ um und kennzeichne die Koeffizientenmatrix, den Ergebnisvektor und den Variablenvektor jeweils mit blau, rot und grün.

b) Schreibe nun die erweiterte Koeffizientenmatrix A^* hin und bestimme den Rang von A^*. Was kannst du jetzt über die Lösungsmenge sagen ohne sie explizit zu berechnen?

c) Nun einmal andersherum:
Schreibe das Gleichungssystem $x * B = b$ mit einzelnen Gleichungen und Variablen x_1, x_2, x_3 hin.

d) Bestimme nun für das Gleichungssystem aus (c) die Lösungsmenge, indem du eine Lösung errätst und dann mit dem dazugehörigen HLGS weitermachst.

2. Vervollständige die Koeffizientenmatrix $A := \begin{pmatrix} 3 & & 0 \\ & & 4 \\ 0 & 1 & \end{pmatrix}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem $x * A = (1, 2, 1)$

a) genau eine Lösung hat.

b) unlösbar ist.

3. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 11 & 10 \\ 0 & 5 & 10 \end{pmatrix}$ und $d := (a, 6, 0)$.

a) Wähle $a \in \mathbb{R}$ so, dass das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ keine Lösung besitzt.

b) Für welche $a \in \mathbb{R}$ ist das Lineare Gleichungssystem $x * A = d$ lösbar und wie sieht dann die Lösungsmenge aus?

4. Gegeben ist das Lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 + 6x_3 &= 4 \\ 2x_1 + 4x_2 + 2x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 1x_2 + 3x_3 &= -8 \end{aligned}$$

Bestimme mit dem Gaußschen Eliminationsverfahren die vollständige Lösungsmenge des LGS.

5. Gegeben ist $A := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (0, 1, 0)$ sagen?

b) Was kannst du über die Lösbarkeit/Lösungsmenge des Gleichungssystems $x * A = (1, 0, 1)$ sagen?

6. Gegeben sei das Lineare Gleichungssystem $x * \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} = (0, 0, 0)$.

a) Ist die Lösungsmenge des LGS ein $\mathbb{R}$-Teilraum von $\mathbb{R}^3$?

b) Falls die Lösungsmenge ein $\mathbb{R}$-Teilraum ist, welche Dimension hat dieser dann?

5. Mathe Nacht

Eigenwerte/Eigenvektoren

1. Gegeben sei der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Weiter sei die geordnete $\mathbb{R}$-Basis $\hat{B}$ gegeben durch $\hat{B} := ((-2,1,0),(0,1,1),(0,0,-1))$ und die Abbildung $\alpha \in \mathrm{End}(V)$ sei bestimmt durch die folgenden Bilder:

$$\begin{aligned}(-2,1,0)^\alpha &= (-2,1,0)\\ (0,1,1)^\alpha &= (-4,-3,-3)\\ (0,0,-1)^\alpha &= (-2,-2,-3)\end{aligned}$$

a) Bestimme $\mathrm{Spek}(\alpha)$!

b) Gib zu jedem Eigenwert die Dimension des Eigenraumes an!

c) Bestimme zu einem Eigenwert den Eigenraum!

d) Prüfe, ob α diagonalisierbar ist!

2. Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und $\alpha \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{R}}(V,V)$. Folgendes ist über α bekannt: 2 ist ein Eigenwert von α mit $\mathrm{Eig}_V(\alpha,2) = \langle(1,0,0),(0,1,0)\rangle_{\mathbb{R}}$. 4 ist ein Eigenwert von α.

Zeige: $\mathrm{Spek}(\alpha) = \{2,4\}$.

3. Es sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und $\alpha \in \mathrm{End}(V)$. Weiter seien $\lambda \in \mathrm{Spek}(\alpha), v_1 \in \mathrm{Eig}_V(\alpha,\lambda)$ und $v_2 \in V$.

Zeige: Ist $\{v_1, v_2\}$ linear abhängig, so ist $v_2 \in \mathrm{Eig}_V(\alpha,\lambda)$.

4. Es sei $V := \mathbb{R}^3$ und $\hat{C}$ sei eine geordnete $\mathbb{R}$-Basis von V. Der Homomorphismus $\gamma : V \to V$ sei gegeben durch die Abbildungsmatrix:

$$M(\gamma,\hat{C},\hat{C}) = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

Zeige, dass γ nicht diagonalisierbar ist.

5. Es sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum der Dimension 4. Weiter seien $v_1,v_2,v_3,v_4 \in V$ so, dass $\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$ K-linear unabhängig ist. Es sei $\beta \in \mathrm{End}(V)$ und es gelte

$$v_1^\beta = 3v_1,\ v_2^\beta = 4v_2,\ v_3^\beta = -v_3,\ v_4^\beta = -v_4$$

Zeige, dass β diagonalisierbar ist!

5. Mathe Nacht

Zusammenhänge

1. Sei $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Seien weiter $a \in \mathbb{R}$ und $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Berechne nachvollziehbar mittels Leibniz-Formel und Entwicklung nach der 2.Zeile die Determinante von A.

b) Begründe, warum α bijektiv ist und berechne $\mathcal{M}(\alpha^{-1}, \hat{B}, \hat{B})$.

c) Ersetze in der Abbildungsmatrix A die letzte Zeile durch $(1, -1, a)$. Für welchen Wert von a ist α nicht bijektiv?

d) Schreibe für diesen Wert von a den Spaltenraum von A als Lösungsmenge eines linearen Gleichungssystems.

2. Sei $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben :

$$A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R}).$$

a) Zeige, dass $P(x) := x^3 - 3x^2 + 2x$ das charakteristische Polynom von α ist und gib die Eigenwerte von α an.

b) Stelle das lineare Gleichungssystem auf, dessen Lösungsmenge genau $\mathrm{Eig}_{\mathbb{R}}(\alpha, 0)$ ist und löse es nachvollziehbar mit dem Gauß-Algorithmus.

c) Welche Dimension haben $\mathrm{Kern}(\alpha)$ und $\mathrm{Bild}(\alpha)$?
Gib eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathrm{Kern}(\alpha)$ an und ergänze diese zu einer $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$.

d) Ist α bijektiv?

3. Sei $\hat{B}$ die geordnete Standardbasis des $\mathbb{R}^3$. Sei $\alpha \in \mathrm{End}_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^3)$ durch folgende Abbildungsmatrix gegeben: $A := \mathcal{M}(\alpha, \hat{B}, \hat{B}) = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 4 \\ 0 & -6 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$.

a) Berechne die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ von α.

b) Sei $P_\alpha(x) := a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ mit $a_3, a_2, a_1, a_0 \in \mathbb{R}$ das charakteristische Polynom von α.
Sei M die Menge aller 3×3-Matrizen über $\mathbb{R}$. Zeige, dass $P_\alpha(A) = 0_M$ gilt.
(Hinweis: $P_\alpha(A)$ ist durch den Einsetzhomomorphimus erklärt.)

c) Bestimme aus $P_\alpha(A) = 0_M$ die inverse Matrix A^{-1}.

d) Bestimme für jedes $j \in \{1, 2, 3\}$ die Lösungsmenge des homogenen Gleichungssystems $x(A-\lambda_j I) = 0_{\mathbb{R}^3}$ und zeige, dass $\hat{C} = ((1, 0, 1), (0, 1, 0), (-1, 0, 4))$ eine $\mathbb{R}$-Basis von $\mathbb{R}^3$ bestehend aus Eigenvektoren ist.

e) Berechne $\mathcal{M}(\alpha, \hat{C}, \hat{C})$. Ist α diagonalisierbar?